Lois de probabilités continues

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants dire si la fonction f est une densité pour une loi de probabilité sur I :

1. $f : x \mapsto 2-x$, $I = [\,0\,;3\,]$;
2. $f : t \mapsto 3t^2$, $I = [\,0\,;1\,]$;
3. $f : t \mapsto \dfrac{1}{3}$, $I = [\,2\,;4\,]$;
4. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$, $I = [\,1\,;2\,]$.

Exercice 2

Déterminer le réel k pour que la fonction f soit une densité pour une loi de probabilité sur I, puis calculer $P([\,2\,;3\,])$.

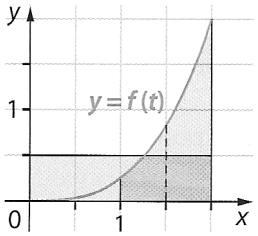
1. $f : x \mapsto k$, $I = [\,1\,;9\,]$;
2. $f : t \mapsto kt^2$, $I = [\,0\,;3\,]$;
3. $f : t \mapsto kt$, $I = [\,2\,;4\,]$;
4. $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$, $I = [\,1\,;e^2\,]$.

Exercice 3

On considère une variable X suivant la loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$. Déterminer le(s) réel(s) t tels que les évènements $(X \in [\,0{,}4\,;0{,}9\,])$ et $(X \in [\,0{,}3\,;t\,])$ soient indépendants.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;2\,]$ par $f(t) = kt^3$ avec $k > 0$.



1. Déterminer le réel k pour que f soit une densité de loi de probabilité sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$.
2. On considère une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité définie par la densité f.
   a. Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.
   b. Déterminer le réel a de $[\,0\,;2\,]$ tel que : $P(0 \leq X \leq a) = P(1 \leq X \leq 2)$.
3. Une variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$.
   a. Indiquer la densité définissant cette loi uniforme.
   b. Pour tout $x_0 > 1{,}5$, comparer : $P(1{,}5 \leq X \leq x_0)$ et $P(1{,}5 \leq Y \leq x_0)$

Exercice 5

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $P(X \leq 0{,}5)$ et $P(X > 10)$.

1. $\lambda = 2$ 2. $\lambda = \dfrac{1}{2}$ 3. $\lambda = 0{,}1$

Exercice 6

1. Déterminer la valeur du paramètre λ de la densité $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ sachant que la loi de probabilité définie par f vérifie $P([\,0\,;3\,]) = \dfrac{e-1}{e}$.
2. En déduire la valeur de $P\left(\left[\,\dfrac{9}{2}\,;+\infty\,\right[\right)$.

Exercice 7

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre 2. Déterminer le réel t dans chacun des cas suivants :

1. $P(X > t) = 0{,}75$;
2. $P(X < t) = 0{,}5$;
3. $P_{(X \geq t)}(X \geq 2t) = 0{,}05$.

Exercice 8

La durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique d'un certain modèle, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Sachant que $P(X \leq 1\,000) = 0{,}229$, déterminer la valeur exacte de λ, puis en donner une valeur approchée à 10^{-5} près.
2. a. Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, déterminer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,500)$.
   b. Démontrer que, pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$: $P_{(X>t)}(X \leq t+h) = P(X \leq h)$.
   c. Sachant qu'une ampoule a fonctionné plus de $3\,000$ heures, quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne avant $4\,000$ heures ?
3. Déterminer la durée moyenne de vie d'une ampoule électrique (on arrondira à l'heure près).

Exercice 9

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(50;0,6)$.

On pose $Y=\dfrac{X-30}{\sqrt{50\times0,6\times0,4}}$. On assimile Y à une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Quel théorème permet de justifier l'approximation ?
2. En déduire une valeur approchée de $P(20\le X\le 24)$.

Exercice 10

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. Dans cet exercice, on donnera pour les probabilités demandées des valeurs approchées à 10^{-4} près.

1. A l'aide de la table, déterminer la probabilité $P(X<0,73)$.
2. A partir de cette valeur, déterminer :
   a. $P(X>0,73)$
   b. $P(X\le -0,73)$
   c. $P(X\ge -0,73)$
3. Déterminer à l'aide de la table :
   a. $P(X\le -0,55)$
   b. $P(X\le 0,77)$
   c. A partir de ces résultats, calculer $P(-0,55\le X\le 0,77)$.
4. Soit t un réel strictement positif. Exprimer $P(X>-t)$ puis $P(X\le -t)$ en fonction de $\Pi(t)=P(X\le t)$.

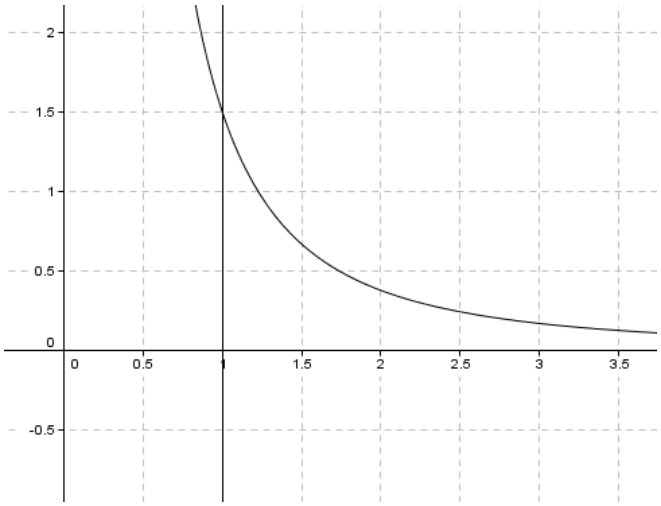
Exercice 11

Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. L' étude montre que l'âge X d'apparition (en mois) des premiers mots suit une loi normale de moyenne $11,5$ et d'écart-type $3,2$.

1. Evaluer, à l'aide de la table :
   a. La probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots entre 8 et 10 mois ;
   b. La probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots avant 7 mois ;
   c. La probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots après 10 mois.
2. Déterminer un intervalle I centré autour de la moyenne qui permette d'affirmer : « la probabilité que l'âge d'apparition des premiers mots appartienne à I est 95% .»

Exercice 12

On considère un réel $a>1$ et la fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{3}{2t^2}$.



1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité pour une loi de probabilité sur l'intervalle $[1;a]$.
2. Le choix d'un nombre x au hasard dans l'intervalle $[1;3]$ suit une loi de probabilité de densité sur $[1;3]$. Calculer $P(x\ge 2)$, puis $P_{(x\ge 1,5)}(x\ge 2)$. Les évènements $(x\ge 2)$ et $(x\ge 1,5)$ sont-ils indépendants ?
3. On veut définir une loi de probabilité sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par une fonction $g:t\mapsto\dfrac{k}{t^2}$, où $k\in\,]0;+\infty[$.
   a. Démontrer que g est une densité pour une loi de probabilité sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $k=1$.
   b. On suppose que $k=1$. Calculer $P([1;4])$; en déduire $P([4;+\infty[)$.

Exercice 13

On donne la définition suivante :
Si une variable suit une loi exponentielle de paramètre λ, on appelle demi-vie de X le paramètre τ tel que : $P(0\le X\le\tau)=P(X\ge\tau)$.

1. Démontrer que $\tau=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
2. Comparer la demi-vie avec l'espérance de la variable aléatoire X.
3. Un fabricant a commercialisé un lot très important d'oscilloscopes identiques, dont la durée de vie en années est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$. On sait que le seuil de 50% d'oscilloscopes encore en fonctionnement a été atteint après 5 années et demie d'utilisation.

a. Déterminer une valeur approchée, à 10^{-3} près, du paramètre λ après avoir interprété ce résultat. En déduire l'espérance de vie d'un oscilloscope au mois près.
b. Sachant qu'un oscilloscope a fonctionné 8 années, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 10 ans à 10^{-2} près ?

Exercice 14

Sur une ligne de train, une enquête a permis de révéler que le retard (algébrique) du train, en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathbb{N}(\mu;\sigma^2)$.

Des observations ont permis d'établir que $P(X<7)\approx 0{,}8413$ et que $E(X)\approx 5$.

1. Déterminer les paramètres de la loi suivie par X.
2. Quelle est la probabilité que ce train arrive avec moins de 3 minutes de retard ?
3. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 8 minutes ?
4. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à 5 minutes ?

Exercice 15 – QCM (une ou plusieurs réponses)

1. La fonction définie sur $[0;1]$ par $f(t)=kt^2$ est une densité sur $[0;1]$ lorsque :
   a. $k=1$
   b. $k=\frac{1}{2}$
   c. $k=3$
2. La densité définissant une loi uniforme sur l'intervalle $[-2;3]$ est :
   a. $t\mapsto\frac{1}{5}t$
   b. $t\mapsto 1$
   c. $t\mapsto 0{,}2$
3. L'espérance de la loi uniforme sur l'intervalle $[-2;3]$ est :
   a. $\frac{1}{5}$
   b. 5
   c. $\frac{1}{2}$
4. La fonction $f:t\mapsto\frac{2}{t^3}$ est une densité sur l'intervalle I si :
   a. $I=[1;10]$
   b. $I=\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
   c. $I=[1;+\infty[$

Exercice 16 - QCM (une ou plusieurs réponses)

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ et modélise la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un appareil ménager avant sa première panne.

1. pour tout réel $t\geq 0$, la valeur exacte de $P(X\geq t)$ est :
   a. $1-e^{-\lambda t}$
   b. $e^{-\lambda t}-1$
   c. $e^{-\lambda t}$
2. La valeur du réel τ tel que $P(X\leq\tau)=P(X\geq\tau)$ est :
   a. $\frac{1}{\lambda}$
   b. $\frac{\ln 2}{\lambda}$
   c. $\frac{\lambda}{\ln 2}$
3. Si l'on sait que la probabilité qu'un appareil tombe en panne avant la première année est 0,18, alors :
   a. $\lambda=\ln\left(\frac{50}{41}\right)$
   b. $\lambda=\ln\left(\frac{41}{50}\right)$
   c. $\lambda=\frac{\ln 82}{\ln 100}$
4. $P_{(X\geq 2)}(X\geq 3)=$
   a. $1-P(2<X<3)$
   b. $P(X\geq 1)$
   c. $P(X\geq 3)$

Exercice 17 – vrai/faux

1. La variable X suit une loi uniforme sur $[-1;5]$. On a : $P(0\leq X\leq 2)=\frac{1}{3}$
2. Si une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ, la probabilité que X soit supérieure à son espérance ne dépasse pas $\frac{1}{3}$.
3. La variable aléatoire T suit une loi exponentielle sur $[0;+\infty[$. Alors $P(1\leq T\leq 4)=P(5\leq T\leq 8)$

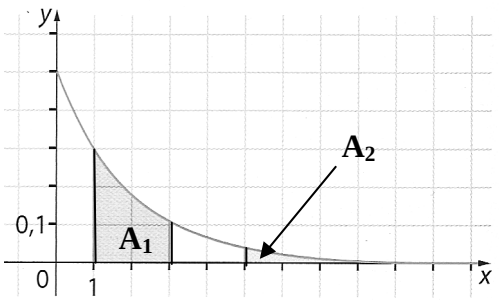
Exercice 18 – vrai/faux

La fonction f proposée définit une densité de probabilité sur l'intervalle I :

1. $I=[0;1]$, $f:t\mapsto t^2$
2. $I=[0;1]$, $f:t\mapsto 4t^3$
3. $I=[-1;0]$, $f:t\mapsto 4t^3$
4. $I=[-1;1]$, $f:t\mapsto\frac{3}{2}t^2$

Exercice 19 – QCM (une ou plusieurs réponses)

On a représenté ci-dessous la fonction de densité d'une loi exponentielle de paramètre λ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Répondre en utilisant le graphique, ou des considérations de cours.



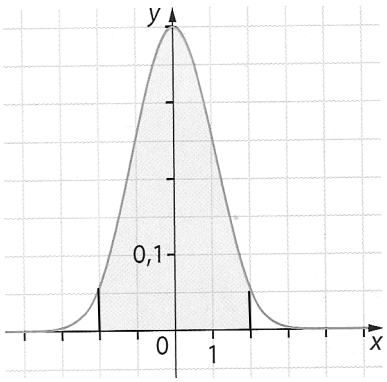
1. Le paramètre λ doit être égal à :
   a. 2
   b. 0,5
   c. 4

2. La probabilité $P([\,1\,;3\,])$
   a. est égale à $\frac{3}{5}$
   b. correspond à l'aire A_1
   c. est environ égale à 0,4

3. La probabilité $P([\,5\,;+\infty\,[)$
   a. correspond à l'aire A_2
   b. est inférieure à 0,1
   c. est égale à $1-P([\,0\,;5\,])$

Exercice 20 – QCM

On a représenté ci-dessous la courbe de la densité de loi normale $\mathcal{N}(\,0\,;1\,)$ sur $\mathbb{R}$. Répondre aux questions à l'aide du graphique ou par calcul.



1. L'aire comprise entre la courbe de la densité de loi normale $\mathcal{N}(\,0\,;1\,)$ sur $\mathbb{R}$.
   a. correspond à une surface illimitée
   b. est infinie
   c. est égale à 1

2. La probabilité $P([\,0\,;1\,])$
   a. est égale à la probabilité $P([\,-1\,;0\,])$
   b. est comprise entre 0,3 et 0,4
   c. est supérieure à la probabilité $P([\,1\,;+\infty\,[)$

3. L'aire colorée
   a. correspond à un intervalle de probabilité 0,95 environ
   b. est environ celle de l'intervalle $[\,-1{,}96\,;1{,}96\,]$
   c. est inférieure à celle de l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$

Exercice 21 – QCM

T, X et Y sont des variables aléatoires.

1. T suit la loi $\mathcal{N}(\,0\,;1\,)$. $P(T>0)=$
   a. 0,5
   b. plus de 0,5
   c. moins de 0,5

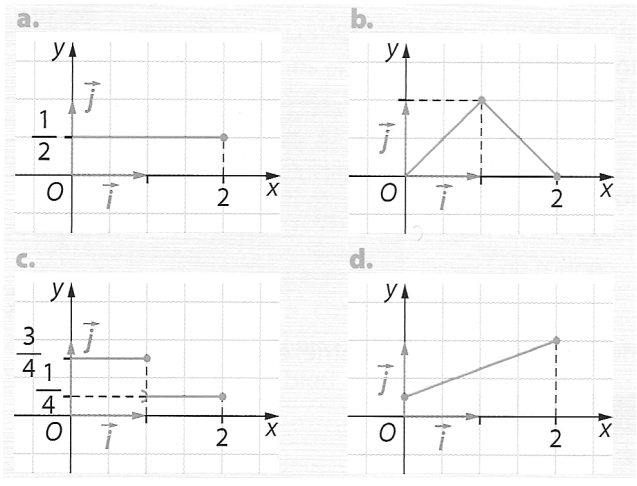
2. X suit la loi $\mathcal{N}(\,2\,;4\,)$. $V(X)=$
   a. 4
   b. 2
   c. 16

3. X suit la loi $\mathcal{N}(\,2\,;4\,)$. $P(0<X<4)=$
   a. $P\left(T\in\left[\,-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,\right]\right)$
   b. environ 0,683
   c. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

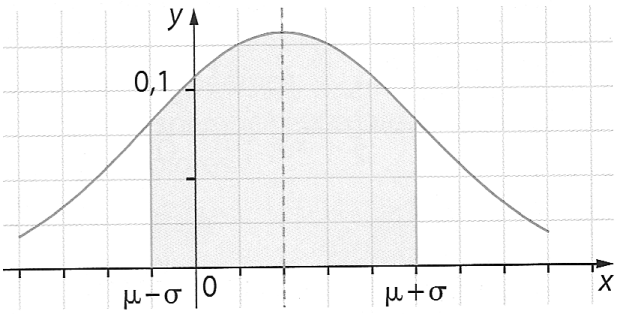
4. Y suit la loi $\mathcal{N}(\,2\,;4\,)$. $P(Y>2)=$
   a. on ne peut pas savoir
   b. 0,5
   c. 0,25

Exercice 22 – QCM

Parmi les fonctions représentées graphiquement ci-dessous, déterminer celles qui définissent une densité de probabilité sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$.



Exercice 23 – vrai/faux



On a tracé ci-dessus la courbe associée à une loi normale $\mathcal{N}(\mu;9)$.

1. La moyenne μ est égale à 3.
2. L'aire délimitée est environ égale à 0,683.
3. La probabilité de l'intervalle $[-2;1]$ est égale à celle de l'intervalle $[3;6]$.
4. La courbe en cloche associée à la loi normale $\mathcal{N}(\mu;4)$ admet le même axe de symétrie, et est plus « resserrée » autour de cet axe.

Exercice 24 – vrai/faux

La fonction f proposée définit une loi de densité de probabilité sur l'intervalle I :

1. $I=[1;3]$, $f:t\mapsto\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t$
2. $I=[1;2]$, $f:t\mapsto\frac{2}{3}t$
3. $I=[1;e]$, $f:t\mapsto\frac{1}{t}$
4. $I=[2;+\infty[$, $f:t\mapsto\frac{2}{t^2}$

Exercice 25 – vrai/faux

Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité définie par une densité f sur l'intervalle $[-2;2]$.

1. $P(X=-2)=P(X=1)$
2. $P(X\le 0)=P(X\ge 0)$
3. f ne s'annule pas sur $[-2;2]$
4. si $P(X<1)=0,6$ alors $P(X\ge 1,5)\le 0,4$

Exercice 26 – vrai/faux

1. On ne peut pas définir une loi uniforme sur l'intervalle $[-3;0]$.
2. Avec une loi uniforme sur un intervalle I, si deux intervalles de I ont la même probabilité, alors ils sont égaux.
3. Avec une loi uniforme, la probabilité d'un intervalle est proportionnel à sa longueur.
4. La densité d'une loi uniforme sur l'intervalle $[-1;4]$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{3}$.
5. On ne peut pas définir une loi uniforme sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Exercice 26 bis – QCM (une ou plusieurs réponses)

On considère une variable X qui modélise le choix d'un réel au hasard dans l'intervalle $[0;10[$. On désigne par Ent la fonction partie entière.

1. $P(X=5)$ est égal à :
   a. $\frac{1}{10}$
   b. 0
   c. $P(X<1)$
2. $P(Ent(X)=5)$ est égal à :
   a. $\frac{1}{10}$
   b. 0
   c. $P(X<1)$
3. $P(X>7)$ est égal à :
   a. $P(X\ge 7,1)$
   b. $P(X\ge 7)$
   c. $P(X\le 3)$
4. L'espérance de X est :
   a. $\frac{1}{10}$
   b. 1
   c. 5
5. $P(X^2>9)$ est égal à :
   a. $\frac{1}{10}$
   b. $P_{(X>5)}(X\ge 6,5)$
   c. 0,7

Exercice 27 – vrai/faux

P est la probabilité définie par une loi exponentielle de paramètre λ :

1. $P([0;2])=2P([0;1])$
2. $P_{[0;1]}([1;2])=P([0;1])$
3. si $P([3;+\infty[)=\frac{1}{e}$, alors $\lambda=\frac{1}{3}$.
4. si $P([0;\ln 4])=0,5$, alors $\lambda=2$.

Exercice 28 – QCU (une seule réponse)
La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Si $P(X > 2) = 0{,}5$ alors :
   a. $\lambda = \frac{1}{2}$
   b. $\lambda = \ln 2$
   c. $\lambda = \frac{1}{2}\ln 2$

2. Si l'espérance de X vaut 3, alors :
   a. $\lambda = \frac{1}{3}$
   b. $\lambda = \ln 3$
   c. $\lambda = \frac{1}{3}\ln 3$

3. La probabilité de l'évènement $1 \leq X \leq 3$ est :
   a. $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$
   b. $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$
   c. $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

4. L'espérance de X est égale à :
   a. $\frac{\lambda}{2}$
   b. $\frac{\ln 2}{\lambda}$
   c. $\frac{1}{\lambda}$

Exercice 29 – vrai/faux
La durée d'attente, en secondes, à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $0{,}01$.

1. La densité de probabilité définissant la loi de Y est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^{-0{,}01t}$.
2. Pour tout réel t positif, $P(Y \leq t) = 1 - e^{-0{,}01t}$.
3. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 10^{-2} près égale à 0,03.
4. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente soit supérieure à 1 minute.

Exercice 30
Quelle est la probabilité qu'un appareil dont la durée de vie suit une loi exponentielle, ait une durée de vie supérieure ou égale au :

1. double de son espérance ?
2. triple de son espérance ?

Exercice 31 – vrai/faux
La variable X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, X suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n \in [0;4]) = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
2. $P(X \in [1;4]) = P(X \in [-4;-1])$
3. $P(X \in [2;6]) = P(X \in [0;4])$
4. $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit la même loi que X.

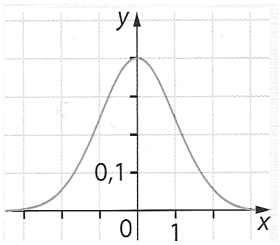
Exercice 32 – QCM (une ou plusieurs réponses)
La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

1. $P(X > 2)$ est égal à :
   a. $P(X < 2)$
   b. $P(X > -2)$
   c. $P(X < -2)$

2. On pose $P(-2 < X < 2) = p$
   a. $p > 0{,}95$
   b. $p < 0{,}99$
   c. $p > 0{,}99$

3. On pose $P(X < 2) = q$
   a. $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(-2 < X < 2)$
   b. $q < 0{,}95$
   c. $q = 2P(0 \leq X < 2)$

Exercice 33 – vrai/faux
On a représenté la fonction de densité de la loi normale.



1. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout réel x
2. $P(1 < X < 2) = P(0 < X < 1)$
3. $P(X < 1) > 0{,}75$
4. $P(-1 < X < 1) = 2P(X < 1) - 1$

Exercice 34 – vrai/faux
1. Si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, l'espérance de X est $E(X) = \mu$.
2. Si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, la variance de X est $V(X) = \sigma$.
3. Si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, $\frac{X-\mu}{\sigma^2}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Exercice 35

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(18;9)$. On lui associe la loi $Y=\dfrac{X-18}{3}$.

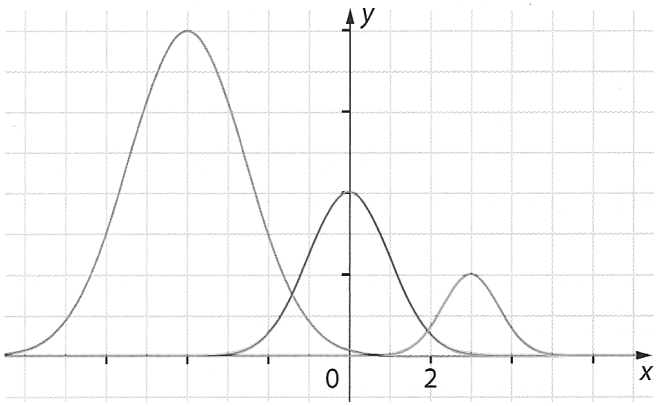
1. Quelle est la loi suivie par Y ?
2. En déduire grâce à la table, les probabilités suivantes :
   a. $P(X\le 21)$
   b. $P(X\ge 24)$
   c. $P(21\le X\le 24)$
   d. $P(X\ge 15)$
   e. $P(15\le X\le 21)$

Exercice 36

On admet qu'une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ a une fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On a représenté ci-dessous trois telles fonctions de densité. Déterminer pour chacune la valeur de μ et σ, sachant que l'une des trois correspond à $\mu=0$ et $\sigma=1$.



Exercice 37 – calculatrice

Sur une Casio graph 35+, le mode d'emploi indique ceci :

- NormPD(x) : la densité de la loi normale centrée réduite.
- NormPD(x, σ, μ) : la densité de la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.
- NormCD(a,b) : la probabilité de l'évènement $P(a\le x\le b)$ avec la loi normale centrée réduite.
- NormCD(a,b, σ, μ) : la probabilité de l'évènement $P(a\le x\le b)$ avec la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

1. Interprétez les résultats suivants :
   a. NormCD(1,6,2,3) = 0,7745375448
   b. NormPD(0.3) = 0.3813878155
   c. InvNormCD(0.975,1,0) = 1.959963985
   d. InvNormCD(0.45,4,10) = 9.497354613

2. Quelle instruction donner à la machine pour calculer, avec X variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$:
   a. $P(-0,7\le X\le 0,8)$
   b. $P(X\le 3)$
   c. $P(X\le -1)$

3. Quelle instruction donner à la machine pour calculer, avec X variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(10;4)$:
   a. $P(10,1\le X\le 10,8)$
   b. $P(X\le 8)$

Exercice 38

On a observé que la taille T des basketteurs, en cm, suivait approximativement une loi normale $(195;6)$.

1. Déterminer, sans calcul, un intervalle dans lequel la taille d'un basketteur pris au hasard a deux chances sur trois de se trouver.
2. Un recruteur décide de restreindre sa recherche aux basketteurs qui se situent dans le plus petit intervalle I centré en 195 tel que $P(T\in I)\approx 0,8$.
   a. Déterminer cet intervalle.
   b. Sachant que le meilleur basketteur français, Tony Parker, mesure 1,86 m, que peut-on penser du choix du recruteur ?

Exercice 39

On considère la fonction f définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f : t\mapsto k\cos t$, où $k\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le réel k pour que f soit la densité d'une loi de probabilité sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et la représenter graphiquement.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité définie par f, calculer :
   a. $P\left(X>-\dfrac{\pi}{6}\right)$
   b. $P\left(-\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{\pi}{4}\right)$
3. Déterminer le réel a tel que $P(-a<X<a)=\dfrac{1}{2}$
4. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 40

Un fabricant souhaite lancer une nouvelle console de jeu pour Noël. Les études marketing montrent que parmi les 2 000 joueurs de la région, 40 % ont déclaré avoir l'intention d'acheter la console de jeu.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui vont effectivement acheter la console.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. En approximant la loi de la variable X par une loi normale dont on précisera les caractéristiques, déterminer le stock que doit avoir un magasin pour que la probabilité de rupture de stock soit inférieure à $0,1$.

Exercice 41 – qcm (une seule réponse)

X est une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que : $P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3}{8}$.

1. Si X suit une loi uniforme sur $[0;N]$, alors N est égal à :
   a. 8 b. $\frac{16}{3}$ c. 5,3
2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :
   a. $\lambda = \ln 2$
   b. λ prend deux valeurs dont la valeur $\ln 2$.
   c. il n'existe pas de tel λ

Exercice 42 - qcm (une ou plusieurs réponses)

X est une variable aléatoire qui suit une loi définie par la densité $f : t \mapsto kt^n$ sur $[1;10]$, alors on peut avoir :

a. $n = 0$ et $k = \frac{1}{10}$
b. $n = 1$ et $k = \frac{2}{99}$
c. $n = -2$ et $k = \frac{10}{9}$

Exercice 43 - qcm (une ou plusieurs réponses)

X est une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 8.

1. Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p, alors :
   a. $n = 20$ et $p = 0,5$
   b. $n = 25$ et $p = 0,4$
   c. $n = 50$ et $p = 0,2$
2. Si X suit une loi normale et si Y est la variable définie par $Y = \frac{X - 10}{2\sqrt{2}}$, alors :
   a. $P(X \geq 10) = 0,8$
   b. $P(-1 \leq Y \leq 1) \approx 0,683$
   c. $P\left(X \leq 10 + 2\sqrt{2}\right) \approx 0,683$

Exercice 44

Lors d'une épidémie chez les bovins, si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt sur un animal, il est possible de le guérir ; sinon, la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et expérimenté sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. Les résultats obtenus sont les suivants :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser ce test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'évènement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $p = 0,058$.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer ces cinq choix comme indépendants et d'assimiler les choix à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. On teste 1 200 vaches sur le cheptel d'un département. On admet que l'on peut considérer ces 1 200 tests comme indépendants et les assimiler à des tirages avec remise. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Justifier que la loi de Y peut être approximée par une loi normale dont on précisera les paramètres.
   b. En déduire une approximation de $P(50 < Y < 70)$.

Exercice 45

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n=40$, $p=0,4$.

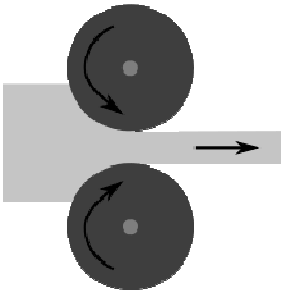
1. Calculer $P(X=16)$ et $P(13\le X\le 15)$.
2. On approche X par une variable Y de loi normale $\mathcal{N}(16;9,6)$.
   a. Justifier l'approximation réalisée.
   b. Calculer $P(Y=16)$ et $P(13\le Y\le 15)$. Que remarque-t-on ? Comment expliquer ce phénomène ?
3. On effectue alors une « correction de continuité », en calculant $P(15,5\le Y\le 16,5)$ et $P(12,5\le Y\le 15,5)$. Effectuer les calculs et comparer avec les résultats du a.

Exercice 46

Au sortir du laminoir, un lingot est découpé en billettes de 6 mètres de longueur. On sait que la tête du lingot présente un défaut sur une certaine longueur X , où X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(8;4)$.

Pour tenter d'éliminer la longueur défectueuse, on détruit systématiquement les deux billettes de tête.

1. Quel est le risque pour que la troisième billette présente encore un défaut ?
2. Calculer le nombre de billettes à détruire pour que la première billette retenue soit sans défaut avec une probabilité de 99 %.



Exercice 47

Les tests de QI sont étalonnés, c'est-à-dire que l'on décide à priori que la répartition des QI suit une loi normale N $(\mu;\sigma^2)$, où μ et σ sont fixés à l'avance.

Voici quelques valeurs :

	test de Wechsler	test de Stanford-Binet	test de Catell
μ	100	100	100
σ	15	16	24

1. Déterminer, pour chaque test, un intervalle centré autour de la moyenne qui contient à peu près 68 % des individus.
2. On considère parfois qu'un individu est surdoué s'il fait partie des 5 % de la population ayant le QI le plus élevé. Déterminer à quelle valeur de QI il correspond pour chacun des tests proposés.

Exercice 48

Le grand mathématicien Henri Poincaré (1854-1912) avait l'habitude d'acheter tous les jours un pain de 1kg chez son boulanger. Il s'était aperçu que sur une semaine d'achat (7 jours), tous les pains achetés pesaient moins de 900 g. Après s'être plaint au boulanger, il avait constaté que durant les 7 jours suivants, tous les pains pesaient plus de 1 kg . Il était finalement revenu voir le boulanger pour lui dire qu'il était décidément un incorrigible tricheur. On suppose que le poids du pain, en kg, suit une distribution normale de loi normale $\mathcal{N}(1;\sigma^2)$.

1. Le boulanger assure que 95 % de ses pains pèsent entre 0,9 kg et 1,1 kg.
   a. En déduire une valeur approchée de σ.
   b. En déduire la probabilité qu'un pain pèse moins de 0,9 kg, puis la probabilité que, pendant une semaine, tous les pains pèsent moins de 0,9 kg.
2. Avec les mêmes hypothèses, déterminer la probabilité pour qu'un pain pèse plus de 1 kg, puis la probabilité que tous les pains pendant une semaine pèsent plus de 1 kg.
3. Refaire les calculs précédents en supposant que simplement 68 % des pains pèsent entre 0,8 kg et 1,1 kg. Le boulanger est il crédible ?

Exercice 49 – qcm (une ou plusieurs réponses)

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Si $P(X<1)=0,5$, alors :
   a. $\lambda=\frac{1}{2}$
   b. $\lambda=\ln 2$
   c. $\lambda=\ln\frac{1}{2}$

2. Si l'espérance de X vaut 0,5, alors :
   a. $\lambda=\frac{1}{2}$
   b. $\lambda=2$
   c. $\lambda=\ln 2$

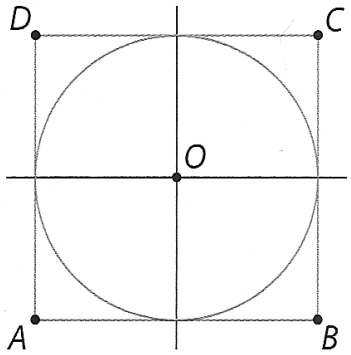
3. La probabilité de l'évènement $2\le X\le 3$ est :
   a. $e^{-3\lambda}-e^{-2\lambda}$
   b. $e^{-2\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)$
   c. $e^{-\lambda}$

4. $P_{(X\ge 1)}(X\ge 3)$ est égal à :
   a. $P(X\ge 2)$
   b. $P_{(X\ge 9)}(X\ge 11)$
   c. $e^{-2\lambda}$

Exercice 50

1. X suit une loi uniforme sur $[-4;4]$. Déterminer le plus petit réel a tel que $P(-a \le X \le a) \ge 0{,}99$.
2. Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.
   a. Dans quel intervalle Z prend-t-elle ses valeurs ?
   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du plus petit réel positif u tel que $P(-u \le Z \le u) \ge 0{,}99$.

Exercice 51 – méthode de Monte-Carlo



On considère le disque de centre O, de rayon 1, et le carré $ABCD$ circonscrit à ce disque.

1. a. On choisit au hasard un point dans le carré : quelle est la probabilité qu'il appartienne au disque ?
   b. On choisit un couple $(x;y)$ de nombres réels. Que peut-on affirmer si $x^2 + y^2 \le 1$?
2. Le résultat du 1.a. permet d'envisager la recherche d'une valeur approchée de π par une méthode statistique. On réalise un grand nombre de fois l'expérience suivante :
   - choix d'un réel x pris au hasard dans $[-1;1]$;
   - choix d'un réel y pris au hasard dans $[-1;1]$.

   Le couple $(x;y)$ représente alors un point du carré $ABCD$:
   - on teste si ce point appartient au disque ;
   - dans l'affirmative, on le comptabilise ;
   - dans la négative, on n'en tient pas compte.

   Au bout d'un grand nombre d'expériences effectuées, on peut calculer la fréquence d'appartenance des points au disque et en déduire une valeur approchée de π. Simuler cette expérience sur un tableur.
3. Soit X la variable comptant le nombre de points dans le disque sur n expériences. On pose :

   $p = \dfrac{\pi}{4}$, $\sigma^2 = np(1-p)$ et $Y = \dfrac{X - np}{\sigma}$.

   a. Justifier que Y peut être approximée par une loi normale $\mathrm{N}(0;1)$.
   b. Indiquer un réel u tel que : $P(-u \le Y \le u) \approx 0{,}95$.
   c. Démontrer que $p(1-p) \le \dfrac{1}{4}$. En déduire que $P\left(-\dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}} \le \dfrac{X}{n} - p \le \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}95$.
   d. Le tableau ci-dessous résume un essai sur 40 000 expériences :

n	Points dans le disque	fréquence	Valeur approchée de π
40 000	31 391	0,784 775	3,139 1

En utilisant le résultat du c., peut-on être sûr à 95 % de la première décimale de π ?
Permet-il d'envisager une valeur unique pour la deuxième décimale de π ?